

Sous-groupes paraboliques et représentations de groupes branchés

Laurent BARTHOLDI, Rostislav I. GRIGORCHUK

Section de Mathématiques, Université de Genève, CP 240, 1211 Genève 24, Suisse

Adresse électronique: Laurent.Bartholdi@math.unige.ch

Steklov Institute of Mathematics, Gubkina 8, Moscow 117966, Russia

Adresse électronique: grigorch@mi.ras.ru

(Transmis le 15 mai 2000)

Résumé. Soit G un groupe branché (au sens de [Gri00]) agissant sur un arbre \mathcal{T} . Un sous-groupe *parabolique* P est le stabilisateur d'un rayon géodésique infini de \mathcal{T} . On note $\rho_{G/P}$ la représentation quasi-régulière associée. Si G est discret, ces représentations sont irréductibles, mais si G est profini, elles se décomposent en une somme directe de représentations de dimension finie $\rho_{G/P_{n+1}} \oplus \rho_{G/P_n}$, où P_n est le stabilisateur d'un sommet de niveau n de \mathcal{T} . Pour quelques exemples concrets, on décompose complètement ρ_{G/P_n} en composantes irréductibles. (G, P_n) et (G, P) sont des paires de Gelfand, d'où de nouvelles occurrences d'algèbres de Hecke abéliennes.

Parabolic Subgroups and Representations of Branch Groups

Abstract. Let G be a branch group (in the sense of [Gri00]) acting on a tree \mathcal{T} . A *parabolic* subgroup P is the stabiliser of an infinite geodesic ray in \mathcal{T} . We denote by $\rho_{G/P}$ the associated quasi-regular representation. If G is discrete, these representations are irreducible, but if G is profinite, they split as a direct sum of finite-dimensional representations $\rho_{G/P_{n+1}} \oplus \rho_{G/P_n}$, where P_n is the stabiliser of a level- n vertex in \mathcal{T} . For a few concrete examples, we completely split ρ_{G/P_n} in irreducible components. (G, P_n) and (G, P) are Gelfand pairs, whence new occurrences of abelian Hecke algebra.

Abridged English Version

We initiate in this paper the study of unitary representations of groups of branch and fractal nature. The importance of this class of groups was made clear in [Gri00, Bar00a] and the numerous papers cited therein.

A *branch group* is a group G acting “nicely” on a d -regular rooted tree \mathcal{T} , with a finite-index subgroup K such that K^d embeds in K by acting on the d subtrees below the root of \mathcal{T} . We introduce parabolic subgroups P , which are stabilizers of infinite rays in \mathcal{T} , and

Classification mathématique 1991. 20F50, 20C12, 11F25, 43A65.

Phrases et mots clés. Groupe fractal; Groupe branché; Sous-groupe parabolique; Représentation quasi-régulière; Algèbre de Hecke; Paire de Gelfand.

Les auteurs remercient le «Fonds National Suisse pour la Recherche Scientifique» et l'Université Hébraïque de Jérusalem.

Note présentée par Mikhael GROMOV

establish that they are weakly maximal. We then study the corresponding quasi-regular representations $\rho_{G/P}$.

If G is a discrete branch group, these representations are irreducible. If G is a profinite branch group, $\rho_{G/P}$ is a direct sum of the trivial representation and of the finite-dimensional representations $\rho_{G/P_{n+1}} \ominus \rho_{G/P_n}$, where P_n is the stabilizer of a level- n vertex in the tree on which G acts.

We formulate our results by focusing explicitly on a few typical examples, one of which, $\bar{\Gamma}$, is the first occurrence of a torsion-free branch group. The facts known of our examples are assembled in the following table:

	\mathfrak{G}	$\tilde{\mathfrak{G}}$	Γ	K	$\bar{\Gamma}$	\bar{K}	$\bar{\bar{\Gamma}}$
Just-infinite	+	+	+	+	—	—	+
Just-nonsolvable	+	+	+	+	+	+	+
Branch	+	+	+	+	—	—	+
Weak Branch	+	+	+	+	+	+	+
Fractal	+	+	+	—	+	+	+
Congruence Property	+	+	+	+	?	?	+
Torsion	+	—	—	—	—	—	+
(1) Virtually Torsion-free	—	—	+	+	+	+	—
(2) Intermediate growth	+	+	+	+	+	+	+
(3) Finitely L -Presented	+	+	+	+	+	+	+
(4) Finite Width	+	+	+	+	?	?	—

Property (1) ranks among the main contributions of this note. (2) is studied in [Gri83, Bar00b]. (3) is studied in [Lys85, BG99, Bar00c]. (4), conjectured for \mathfrak{G} as early as 1989 by the second author, is studied in [Roz96, BG00, Bar00d]. A thorough treatment of \mathfrak{G} appears in [Har00].

For these examples, we completely split the quasi-regular representations ρ_{G/P_n} in irreducible components. (G, P_n) and (G, P) are Gelfand pairs, giving new instances of abelian Hecke algebra.

1. INTRODUCTION

Nous amorçons dans cet article l'étude des représentations unitaires de groupes fractals et branché. L'importance de cette classe de groupes a été mise en évidence dans [Gri00, Bar00a] et les nombreuses références qui s'y trouvent.

Nous définissons des sous-groupes paraboliques P , démontrons leur maximalité faible, et étudions les représentations quasi-régulières $\rho_{G/P}$ associées.

Si G est un groupe branché discret, ces représentations sont irréductibles. Si G est un groupe branché profini, $\rho_{G/P}$ est la somme directe de la représentation triviale de G et des représentations de dimension finie $\rho_{G/P_{n+1}} \ominus \rho_{G/P_n}$, où P_n est le stabilisateur d'un sommet de niveau n dans l'arbre sur lequel G agit.

Nous avons formulé nos résultats en nous concentrant sur quelques exemples typiques ; l'un d'eux, $\bar{\Gamma}$, est le premier exemple de groupe branché virtuellement sans torsion. Nous donnons plus de détails dans [BG99].

Nous décomposons complètement les représentations ρ_{G/P_n} en composantes irréductibles. Pour ces exemples, (G, P_n) et (G, P) sont des paires de Gelfand, produisant de nouvelles occurrences d'algèbres de Hecke abéliennes.

2. DÉFINITIONS PRINCIPALES

Les groupes que nous considérons sont tous des sous-groupes du groupe $\text{Aut}(\mathcal{T})$ d'automorphismes d'un arbre régulier \mathcal{T} . Soit $\Sigma = \{1, \dots, d\}$ un alphabet fini. L'ensemble des sommets de l'arbre \mathcal{T}_Σ est l'ensemble des suites finies sur Σ ; deux suites sont reliées par une arête si une

suite peut être obtenue à partir de l'autre par ajout à droite d'une lettre de Σ . La racine de l'arbre est la suite vide \emptyset , et les descendants du sommet σ sont tous les σs , pour $s \in \Sigma$.

Choisissons un ensemble Σ , et soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\Sigma$. Pour tout sous-groupe $G < \text{Aut}(\mathcal{T})$, soit $\text{Stab}_G(\sigma)$ le sous-groupe de G constitué des automorphismes fixant la suite σ , et soit $\text{Stab}_G(n)$ le sous-groupe de G constitué des suites fixant toutes les suites de longueur n :

$$\text{Stab}_G(\sigma) = \{g \in G \mid g\sigma = \sigma\}, \quad \text{Stab}_G(n) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma^n} \text{Stab}_G(\sigma).$$

Les $\text{Stab}_G(n)$ sont des sous-groupes distingués d'indice fini dans G ; en particulier $\text{Stab}_G(1)$ est d'indice au plus $d!$. Soit G_n le quotient $G/\text{Stab}_G(n)$. Si $g \in \text{Aut}(\mathcal{T})$ fixe la suite σ , on note $g|_\sigma$ l'élément correspondant de $\text{Aut}(\mathcal{T})$ associé à la restriction aux suites commençant par σ , ce qui s'écrit en formules $\sigma g|_\sigma(\tau) = g(\sigma\tau)$. Comme le sous-arbre en-dessous de n'importe quel sommet est isomorphe à l'arbre initial \mathcal{T}_Σ , on obtient ainsi une application

$$(1) \quad \psi : \begin{cases} \text{Stab}_{\text{Aut}(\mathcal{T})}(1) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{T})^\Sigma \\ h \mapsto (h|_1, \dots, h|_d) \end{cases}$$

qui est un isomorphisme de groupes.

Un sous-groupe $G < \text{Aut}(\mathcal{T})$ est *sphériquement transitif* si l'action de G sur Σ^n est transitive pour tout $n \in \mathbb{N}$. On supposera toujours que cette condition est satisfaite.

G est *fractal* si pour chaque sommet σ de \mathcal{T}_Σ on a $\text{Stab}_G(\sigma)|_\sigma \cong G$, où l'isomorphisme est induit par l'identification de \mathcal{T}_Σ avec le sous-arbre enraciné en σ . On a alors pour tout n une injection $\text{Stab}_G(n) < G^{d^n}$.

Si σ est une suite et $g \in \text{Aut}(\mathcal{T})$ est un automorphisme, on note g^σ l'élément de $\text{Aut}(\mathcal{T})$ agissant comme g sur les suites commençant par σ , et trivialement sur les autres: $g^\sigma(\sigma\tau) = \sigma g(\tau)$, et $g^\sigma(\tau) = \tau$ si τ ne commence pas par σ .

Soit $G < \text{Aut}(\mathcal{T})$ un groupe agissant fidèlement et sphériquement transitivement sur un arbre enraciné \mathcal{T}_Σ . Le *stabilisateur rigide* de σ est $\text{Rist}_G(\sigma) = \{g^\sigma \mid g \in G\} \cap G$, et on note $\text{Rist}_G(n) = \prod_{\sigma \in \Sigma^n} \text{Rist}_G(\sigma)$.

Définitions. Soit $G < \text{Aut}(\mathcal{T})$ un groupe sphériquement transitif.

1. G est *régulièrement branché* s'il possède un sous-groupe $K < \text{Stab}_G(1)$ d'indice fini tel que $K^\Sigma < \psi(K)$.
2. G est *branché* si $\text{Rist}_G(n)$ est d'indice fini dans G pour tout n .
3. G est *faiblement branché* si tous ses stabilisateurs rigides $\text{Rist}_G(\sigma)$ sont infinis.
4. G est *rugueux* si tous ses stabilisateurs rigides sont finis.

Remarquons que, pour les groupes fractals, 1 implique 2 implique 3 dans la définition ci-dessus, et qu'un groupe est soit faiblement branché soit rugueux. Remarquons aussi qu'en principe ces notions dépendent du choix de \mathcal{T} et de l'action de G .

Toutes ces définitions sont aussi valables dans la catégorie des groupes profinis, mais dans ce cas il faut considérer $\text{Aut}(\mathcal{T})$ comme un groupe profini avec sa topologie naturelle, et G doit être un sous-groupe fermé.

3. EXEMPLES PRINCIPAUX

Comme exemple de groupes rugueux, il y a \mathbb{Z} , $D_\infty = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ et le groupe de l'allumeur de réverbères $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On se focalise ici plutôt sur les groupes branchés et faiblement branchés.

3.1. Le groupe \mathfrak{S} . Ce groupe a été défini par le second auteur en 1980 [Gri80], et agit sur l'arbre \mathcal{T}_2 . Soit a l'automorphisme de \mathcal{T}_2 permutant les deux branches à la racine. Soit récursivement b l'automorphisme agissant comme a sur la branche gauche et comme c sur la branche droite, c l'automorphisme agissant comme a à gauche et comme d à droite, et d l'automorphisme agissant trivialement à gauche et comme b à droite. En formules, $\psi(b) = (a, c)$, $\psi(c) = (a, d)$ et $\psi(d) = (1, b)$. Soit \mathfrak{S} le groupe engendré par $\{a, b, c, d\}$. (Un quelconque des générateurs $\{b, c, d\}$ peut être omis, car $\{1, b, c, d\}$ est le groupe de Klein.)

3.2. Le groupe $\tilde{\mathfrak{G}}$. Cet autre groupe a été défini par les auteurs dans [BG00], et agit aussi sur \mathcal{T}_2 . Avec la même notation que ci-dessus, on définit $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$ par $\psi(\tilde{b}) = (a, \tilde{c})$, $\psi(\tilde{c}) = (1, \tilde{d})$ et $\psi(\tilde{d}) = (1, \tilde{b})$. Soit $\tilde{\mathfrak{G}}$ le groupe engendré par $\{a, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}\}$. Clairement, tous ces générateurs sont d'ordre 2 et $\{\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}\}$ engendrent un groupe abélien élémentaire d'ordre 8. Aussi, $\tilde{\mathfrak{G}}$ a pour sous-groupe $\mathfrak{G} = \langle a, \tilde{b}\tilde{c}, \tilde{c}\tilde{d}, \tilde{d}\tilde{b} \rangle$. Soit $\tilde{\mathfrak{K}}$ le sous-groupe normal $\langle [a, \tilde{b}], [a, \tilde{d}] \rangle^{\tilde{\mathfrak{G}}}$ de $\tilde{\mathfrak{G}}$.

3.3. Le groupe Γ . Les trois groupes suivants sont des sous-groupes de $\text{Aut}(\mathcal{T}_3)$. Soit a l'automorphisme de \mathcal{T}_3 permutant cycliquement les trois branches supérieures. Soit r l'automorphisme de \mathcal{T}_3 défini récursivement par $\psi(r) = (a, 1, r)$. Soit Γ le sous-groupe de $\text{Aut}(\mathcal{T}_3)$ engendré par $\{a, r\}$. Soit K le sous-groupe normal $\langle ar, ra \rangle$ de Γ .

3.4. Le groupe $\bar{\Gamma}$. Soit s l'automorphisme de \mathcal{T}_3 défini récursivement par $\psi(s) = (a, a, s)$, et soit $\bar{\Gamma}$ le sous-groupe de $\text{Aut}(\mathcal{T}_3)$ engendré par $\{a, s\}$. Soit \bar{K} le sous-groupe normal $\langle sa^{-1}, a^{-1}s \rangle$ de $\bar{\Gamma}$.

3.5. Le groupe $\bar{\bar{\Gamma}}$. Soit t l'automorphisme de \mathcal{T}_3 défini récursivement par $\psi(t) = (a, a^{-1}, t)$, et soit $\bar{\bar{\Gamma}}$ le sous-groupe de $\text{Aut}(\mathcal{T}_3)$ engendré par $\{a, t\}$; il a été étudié dans les années 80 par Narain Gupta and Said Sidki [GS83a, GS83b].

4. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Nous résumons les propriétés principales de nos exemples dans le tableau ci-dessous. Remarquons que tous ces exemples sont résiduellement finis. Un point d'interrogation (?) indique que la propriété n'est pas connue pour ce groupe.

Rappelons qu'un groupe G est *juste-infini* s'il est infini, mais que tous les quotients propres sont finis. G est *juste-non-résoluble* s'il n'est pas résoluble, mais que tous ses quotients propres le sont. G a la *propriété de congruence* si tout sous-groupe de G d'indice fini contient $\text{Stab}_G(n)$ pour un certain n . G a *croissance intermédiaire* si pour une quelconque métrique des mots sur G le volume des boules croît à un taux plus rapide que polynômial mais plus lent qu'exponentiel. G est de *largeur finie* s'il existe une borne uniforme sur le rang des quotients $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ de sa suite centrale descendante. G est de *L -présentation finie* s'il peut être présenté par un ensemble fini S de générateurs et les itérées d'un ensemble fini de relations par un ensemble fini de substitutions sur S .

	\mathfrak{G}	$\tilde{\mathfrak{G}}$	Γ	K	$\bar{\Gamma}$	\bar{K}	$\bar{\bar{\Gamma}}$
Juste-infini	+	+	+	+	—	—	+
Juste-non-résoluble	+	+	+	+	+	+	+
Régulièrement branché sur	$\langle [a, b] \rangle^{\mathfrak{G}}$	$\tilde{\mathfrak{K}}$	Γ'	Γ'	—	—	$\bar{\bar{\Gamma}}$
Faiblement branché	+	+	+	+	+	+	+
Fractal	+	+	+	—	+	+	+
Propriété de congruence	+	+	+	+	?	?	+
Torsion	+	—	—	—	—	—	+
(1) Sous-groupe sans torsion d'indice	∞	∞	3	1	3	1	∞
(2) Croissance intermédiaire	+	+	+	+	+	+	+
(3) L -présentation finie	+	+	+	+	+	+	+
(4) Largeur finie	+	+	+	+	?	?	—

La propriété (1) fait partie des contributions majeures de cette note. (2) est étudiée dans [Gri83, Bar00a]. (3) est étudiée dans [Lys85, BG99, Bar00c]. (4), conjecturée pour \mathfrak{G} dès 1989 par le second auteur, est étudiée dans [Roz96, BG00, Bar00d]. La référence [Har00] dévoue un chapitre entier à \mathfrak{G} .

5. SOUS-GROUPES PARABOLIQUES

Soit $\mathcal{T} = \Sigma^*$ un arbre enraciné. Un *rayon* e dans \mathcal{T} est une géodésique infinie partant de la racine de \mathcal{T} , ou de manière équivalente un élément de $\partial\mathcal{T} = \Sigma^\mathbb{N}$.

Soit $G < \text{Aut}(\mathcal{T})$ un sous-groupe quelconque et soit e un rayon. Le *sous-groupe parabolique* associé est $P_e = \text{Stab}_G(e)$.

Les points suivants méritent une attention particulière :

- $\bigcap_{e \in \partial\mathcal{T}} P_e = \bigcap_{g \in G} P^g = 1$ (c'est-à-dire que P a un *noyau trivial*).
- Soit $e = e_1 e_2 \dots \in \Sigma^\mathbb{N}$ un rayon infini et soient $P_n = \text{Stab}_G(e_1 \dots e_n)$ les sous-groupes stabilisant un point de niveau n . Alors les P_n sont d'indice d^n dans G (puisque G agit transitivement sur Σ^n) et satisfont $P_e = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n$.
- P est d'indice infini dans G , et a la même image que P_n dans le quotient G_n .

Soit G un groupe branché, et soit H un sous-groupe quelconque. H est *faiblement maximal* si H est d'indice infini dans G , mais si tous les sous-groupes de G contenant strictement H sont d'indice fini dans G . (On remarque que tout sous-groupe infini de type fini possède des sous-groupes faiblement maximaux, par le lemme de Zorn).

Théorème 1. *Soit P un sous-groupe parabolique d'un groupe régulièrement branché G . Alors P est faiblement maximal.*

Si G est un groupe branché, le sous-groupe parabolique P peut être décomposé explicitement en une extension scindée itérée par des groupes finis. Par exemple, pour le groupe prototypique \mathfrak{G} du paragraphe 3.1 pour lequel $d = 2$, on pose $e = dd\dots$ et $P = P_e$, obtenant le

Théorème 2. *P/P' est un 2-groupe infini élémentaire, engendré par les images de c , d et des éléments de la forme $(1, \dots, 1, (ac)^4)$ dans $\text{Rist}_{\mathfrak{G}}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a la décomposition suivante:*

$$P = \left(B \times \left((K \times ((K \times \dots) \rtimes \langle (ac)^4 \rangle)) \rtimes \langle b, (ac)^4 \rangle \right) \right) \rtimes \langle c, (ac)^4 \rangle,$$

où chaque facteur B, K, K, \dots de niveau n dans la décomposition agit sur le sous-arbre juste sous e_n mais ne contenant pas e_{n+1} . B est ici la clôture normale de b , et K est la clôture normale de $[a, b]$.

6. REPRÉSENTATIONS QUASI-RÉGULIÈRES

Si H est un sous-groupe du groupe discret G , on note $\rho_{G/H}$ la représentation quasi-régulière de G sur $\ell^2(G/H)$; si $H = 1$, elle est la représentation régulière gauche de G .

Le *commensurateur* du sous-groupe H de G est

$$\text{comm}_G(H) = \{g \in G \mid H \cap H^g \text{ est d'indice fini dans } H \text{ et } H^g\}.$$

De façon équivalente, $\text{comm}_G(H)$ est l'ensemble des $g \in G$ tels que les classes à droite gH et $g^{-1}H$ ont des orbites finies dans $\{kH\}_{k \in G}$ pour l'action de H sur G/H par multiplication à gauche.

Un critère de George Mackey affirme que, pour un groupe infini G , la représentation quasi-régulière $\rho_{G/H}$ est irréductible si et seulement si $\text{comm}_G(H) = H$.

Théorème 3. *Si G est un groupe discret fractal et faiblement branché, alors $\text{comm}_G(P) = P$.*

Corollaire 4. *Il y a une quantité non dénombrable de représentations irréductibles non-équivalentes de la forme $\rho_{G/P}$, où G est fractal, faiblement branché, et P est un sous-groupe parabolique.*

Une situation complètement différente se présente si G est un groupe profini ; soient en effet ρ_{G/P_n} les représentations de dimension finie. Elles forment une tour ascendante de représentations, avec $\rho_{G/P_{n+1}} = \rho_{G/P_n} \oplus \pi_n^\perp$ pour des représentations π_n^\perp . On remarque aussi que le sous-groupe $P = \bigcap_{n \geq 0} P_n$ est fermé.

Théorème 5. *Soit G un groupe profini branché et soit P un sous-groupe parabolique. Alors la représentation quasi-régulière $\rho_{G/P}$ se décompose en une somme de représentations de dimension finie :*

$$\rho_{G/P} = \bigoplus_{n \geq 0} \pi_n^\perp.$$

Supposons maintenant que ce groupe profini branché est la complétion profinie \widehat{G} d'un groupe discret G satisfaisant la propriété de congruence. Alors les représentations irréductibles de \widehat{G} sont en correspondance bi-univoque avec les représentations irréductibles des groupes finis $G_n = G/\text{Stab}_G(n)$. Or ρ_{G_n} est une sous-représentation de $\rho_{G/P_n} \otimes \cdots \otimes \rho_{G/P_n}$ (avec d^n facteurs), puisque $\text{Stab}_G(n) = \bigcap_{g \in G/P_n} P_n^g$. On est ainsi amené à étudier des représentations ρ_{G/P_n} et de leurs composantes irréductibles. On poursuit cette étude sur nos exemples de base dans la section suivante.

7. ALGÈBRES DE HECKE ET PAIRES DE GELFAND

Considérons maintenant les représentations quasi-régulières ρ_{G/P_n} de dimension finie, qui se factorisent à travers le groupe fini G_n .

Définition. Soit G un groupe et H un sous-groupe. L'*algèbre de Hecke* (aussi appelée *algèbre d'intersection*) $\mathcal{H}(G, H)$ est l'algèbre $\text{End}_G(\ell^2(G/H))$, où $\ell^2(G/H)$ est un G -module pour la multiplication à gauche. $\mathcal{H}(G, H)$ peut être pensée comme l'algèbre des fonctions (H, H) -biinvariantes sur G , avec le produit de convolution

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{y \in G} f(xy)g(y^{-1}).$$

$\mathcal{H}(G, H)$ est engendrée par les fonctions (H, H) -biinvariantes sur G , où de façon équivalente par les doubles classes HgH . Le résultat suivant souligne l'importance des algèbres de Hecke dans l'étude de la décomposition des représentations [CR90, Section 11D] : supposons que H est d'indice fini dans G . Alors $\mathcal{H}(G, H)$ est une algèbre semi-simple. Il y a une bijection canonique entre les composantes irréductibles de $\rho_{G/H}$ et les facteurs simples de $\mathcal{H}(G, H)$, et préservant leurs multiplicités.

Ainsi, si $\mathcal{H}(G, P)$ est abélienne, sa décomposition en G -modules simples a autant de composantes qu'il y a de doubles classes PgP dans G . Les doubles classes de P_n dans G , elles, sont données par les orbites de P_n sur G/P_n , ou, en d'autres termes, par les orbites de P_n sur Σ^n . Celles-ci peuvent être décrites explicitement :

Lemme 6. *Pour les groupes \mathfrak{S} et $\tilde{\mathfrak{S}}$, les sous-groupes P_n et \tilde{P}_n ont $n+1$ orbites dans Σ^n ; ce sont $\{2^n\}$ et les $2^i 1 \Sigma^{n-1-i}$ pour $0 \leq i < n$. Les orbites des groupes profinis P et \tilde{P} dans $\Sigma^\mathbb{N}$ sont $\{2^\infty\}$ et les $2^i 1 \Sigma^\mathbb{N}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Pour les trois exemples Γ , $\bar{\Gamma}$ et $\overline{\bar{\Gamma}}$, le sous-groupe P_n a $2n+1$ orbites dans Σ^n ; ce sont $\{3^n\}$ et les $3^i 1 \Sigma^{n-1-i}$ et $3^i 2 \Sigma^{n-1-i}$ pour $0 \leq i < n$. Les orbites des groupes profinis P dans $\Sigma^\mathbb{N}$ sont $\{3^\infty\}$ et les $3^i 1 \Sigma^\mathbb{N}$ et $3^i 2 \Sigma^\mathbb{N}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Théorème 7. $\rho_{\mathfrak{S}/P_n}$ et $\rho_{\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{P}_n}$ se décomposent en somme directe de $n+1$ composantes irréductibles, une de degré 2^i pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et deux de degré 1.

$\rho_{\Gamma/P}$, $\rho_{\bar{\Gamma}/P}$ et $\rho_{\overline{\bar{\Gamma}}/P}$ se décomposent en somme directe de $2n+1$ composantes irréductibles, deux de degré 3^i pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et trois de degré 1.

On a vu que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, P_n)$ est grosso modo de dimension n . Sa structure est encore plus claire si on introduit la définition suivante : soit G un groupe et H un sous-groupe. La paire (G, H) est une *paire de Gelfand* si toutes les sous-représentations irréductibles de $\rho_{G/H}$ ont multiplicité 1. De façon équivalente, (G, H) est une paire de Gelfand si $\mathcal{H}(G, H)$ est abélienne.

Théorème 8. *Pour nos cinq exemples (G, P) et (G, P_n) sont des paires de Gelfand pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Ainsi $\mathcal{H}(\mathfrak{G}, P_n) \cong \mathcal{H}(\tilde{\mathfrak{G}}, \tilde{P}_n) \cong \mathbb{C}^{n+1}$ et $\mathcal{H}(\Gamma, P_n) \cong \mathcal{H}(\bar{\Gamma}, P_n) \cong \mathcal{H}(\bar{\bar{\Gamma}}, P_n) \cong \mathbb{C}^{2n+1}$. On a $\mathcal{H}(G, P) \cong \mathbb{C}$ pour tous les groupes discrets considérés, et $\mathcal{H}(\hat{G}, P) \cong \mathbb{C}^\infty$ pour leur complétion profinie.

REFERENCES

- [Bar00a] Laurent Bartholdi, *Croissance des groupes agissant sur des arbres*, Thèse de Doctorat (PhD), Université de Genève, 2000.
- [Bar00b] Laurent Bartholdi, *Croissance des groupes agissant sur des arbres*, Ph.D. thesis, Université de Genève, 2000.
- [Bar00c] Laurent Bartholdi, *L-presentations and branch groups*, submitted to J. Algebra, 2000.
- [Bar00d] Laurent Bartholdi, *Lie algebras and growth in branch groups*, preprint, 2000.
- [BG99] Laurent Bartholdi and Rostislav I. Grigorchuk, *On parabolic subgroups and Hecke algebras of some fractal groups*, submitted to Proc. Conf. Bielefeld, 1999, math.GR/9911206.
- [BG00] Laurent Bartholdi and Rostislav I. Grigorchuk, *Lie methods in growth of groups and groups of finite width*, Computational and Geometric Aspects of Modern Algebra (Michael Atkinson et al., ed.), London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 275, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, pp. 1–27.
- [CR90] Charles W. Curtis and Irving Reiner, *Methods of representation theory. Vol. I*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Gri80] Rostislav I. Grigorchuk, *On Burnside's problem on periodic groups*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **14** (1980), no. 1, 53–54, English translation: Functional Anal. Appl. **14** (1980), 41–43.
- [Gri83] Rostislav I. Grigorchuk, *On the Milnor problem of group growth*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **271** (1983), no. 1, 30–33.
- [Gri00] Rostislav I. Grigorchuk, *Just infinite branched groups*, Horizons in Profinite Groups (Dan Segal, Markus P. F. du Sautoy, and Aner Shalev, eds.), Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 121–179.
- [GS83a] Narain D. Gupta and Said N. Sidki, *On the Burnside problem for periodic groups*, Math. Z. **182** (1983), 385–388.
- [GS83b] Narain D. Gupta and Said N. Sidki, *Some infinite p-groups*, Algebra i Logika **22** (1983), no. 5, 584–589.
- [Har00] Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, University of Chicago Press, 2000.
- [Lys85] Igor G. Lysionok, *A system of defining relations for the Grigorchuk group*, Mat. Zametki **38** (1985), 503–511.
- [Roz96] Alexander V. Rozhkov, *Lower central series of a group of tree automorphisms*, Mat. Zametki **60** (1996), no. 2, 225–237, 319.